

5. INTEGRACIÓN EN R

5.1. DEFINICIÓN Y PROPIEDADES

Sea f acotada en $[a,b]$. Dividamos $[a,b]$ en n subintervalos de la misma longitud x por medio de $n+1$ puntos

$$a=x_0 < x_1 < \dots < x_n=b \quad \text{con} \quad x_{k+1}-x_k = \frac{b-a}{n} \quad x$$

y formemos para cada n las llamadas sumas inferior (L_n) y superior (U_n):

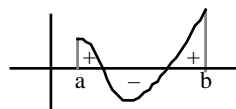
$$L_n = \sum_{k=1}^n m_k x; \quad U_n = \sum_{k=1}^n M_k x, \quad \text{donde} \quad m_k = \inf\{f(x): x \in [x_{k-1}, x_k]\} \\ M_k = \sup\{f(x): x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

Si las dos sucesiones L_n y U_n convergen hacia un mismo límite, decimos que f es integrable en $[a,b]$, representamos ese límite común por $\int_a^b f$ ó $\int_a^b f(x)dx$ y le llamamos integral de f en $[a,b]$.

[Se puede demostrar que L_n y U_n siempre convergen; a sus límites respectivos se les llama integral inferior y superior de f ; una función es, pues, integrable si las integrales superior e inferior coinciden] [la definición dada de integral no es exactamente la "integral de Riemann" que se suele dar (ver Spivak), pero es mucho más corta].

Significado geométrico claro: si $f \geq 0$, la integral $\int_a^b f(x)dx$ representa el área A de la región limitada por la gráfica de f , el eje x y las rectas $x=a$ y $x=b$: A es para todo n mayor que la suma L_n de las áreas de los rectángulos pequeños y menor que la suma U_n de los grandes; al crecer n , ambas sumas se aproximan hacia A . Si $f \leq 0$, los L_n y U_n son negativos. La integral $\int_a^b f(x)dx$ en valor absoluto es el área de la región (situada bajo el eje x) limitada por el eje x , la gráfica de f y las rectas $x=a$ y $x=b$.

Si f es positiva y negativa, la integral representará la diferencia entre las áreas de las regiones que queden por encima y las áreas de las que queden por debajo del eje x :

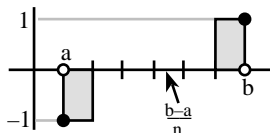
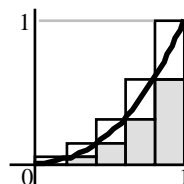


Gracias a los teoremas que veremos, para saber si f es integrable y para calcular la integral no necesitaremos acudir a la definición casi nunca. Por ahora, con lo visto, estudiemos unos ejemplos:

$$f(x)=x^2, \quad x \in [0,1] \quad L_n = \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)^2}{n^2} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} [0^2 + \dots + (n-1)^2], \quad U_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} [1^2 + \dots + n^2]$$

Usando el resultado que vimos en un problema de sucesiones $1^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$L_n = \frac{[n-1]n[2n-1]}{6n^3}, \quad U_n = \frac{n[n+1][2n+1]}{6n^3}. \quad \text{Ambas tienden a } \frac{1}{3} \text{ y por tanto } \int_0^1 f = \frac{1}{3}.$$



$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x=a \\ 0 & \text{si } a < x < b \\ 1 & \text{si } x=b \end{cases}$$

$$L_n = -\frac{b-a}{n}, \quad U_n = \frac{b-a}{n}. \quad \text{Así pues } \int_a^b g = 0.$$

La función es discontinua, pero integrable. Se ve que la integral seguiría siendo nula si cambiamos el valor 0 por cualquier otro en un número finito de puntos de (a,b) .

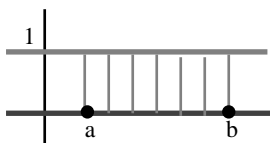
[Como veremos pronto, las funciones acotadas con un número finito de discontinuidades son siempre integrables; para encontrar funciones no integrables tenemos que buscar funciones tan patológicas como la siguiente].

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ irracional} \end{cases}, \quad x \in [a,b]$$

En cada $[x_{k-1}, x_k]$, para todo n , existen racionales e irracionales.

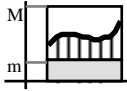
$$\text{Así pues, } L_n = \sum_{k=1}^n 0 \frac{b-a}{n} = 0, \quad U_n = \sum_{k=1}^n 1 \frac{b-a}{n} = b-a \quad \text{y } h \text{ no es integrable.}$$


(hay extensiones del concepto de integral: h sí es "integrable Lebesgue" y su integral en dicho sentido es 0 [hay muchos más irracionales que racionales]).





Las siguientes propiedades son intuitivamente claras a la vista del significado geométrico de la integral y se demuestran mecánicamente usando de las definiciones:


Teor: Sean f y g integrables en $[a,b]$. Entonces: $\int_a^b cf = c \int_a^b f$, $c \in \mathbf{R}$; $\int_a^b [f+g] = \int_a^b f + \int_a^b g$


 Si $m \leq f \leq M$ en $[a,b]$ $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$


 $\int_a^b |f|$

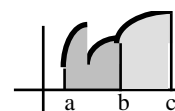

 Si f, g en $[a,b]$ $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$


 Si f es impar $\int_{-b}^b f = 0$


 Si f es par $\int_{-b}^b f = 2 \int_0^b f$

[las dos primeras propiedades se suelen expresar diciendo que "la integral es lineal" (como la derivada)]

La próxima sigue siendo intuitiva, pero es pesada de demostrar con nuestra definición (ver libros). [Para f continua será trivial usando los teoremas de 5.2, pero la propiedad es cierta también para f integrable y discontinua].



Teor: Sean $a < c < b$; f integrable en $[a,b]$ \iff f integrable en $[a,c]$ y $[c,b]$, e $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Definiendo $\int_a^a f = 0$ y $\int_a^b f = - \int_b^a f$, la igualdad es válida para a,b,c cualesquiera.

Los dos siguientes teoremas nos dicen que las funciones (acotadas) no integrables son extrañas:

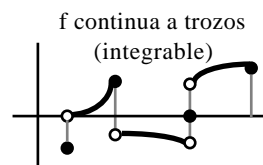
Teor: f continua en $[a,b]$ \implies f integrable en $[a,b]$

Sabemos que f es uniformemente continua: la diferencia entre dos valores cualesquiera de la f en dos $x,y \in [a,b]$ es tan pequeña como queramos si x e y son suficientemente próximos; en particular, lo es la diferencia entre los valores máximo y mínimo de f en un intervalo $[x_k, x_{k+1}]$, si éste es muy pequeño. Así, si n es suficientemente grande tenemos que para cada k :

$$M_k - m_k < \frac{b-a}{n} \text{ para cualquier } k. \text{ Por tanto } U_n - L_n = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x < \frac{b-a}{n} \text{ para } n \text{ grande.}$$

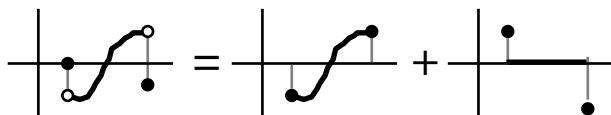
Así pues U_n y L_n tienen el mismo límite y f es integrable.

Ya vimos que funciones discontinuas podían ser integrables. Una f se dice continua a trozos en $[a,b]$ si es continua salvo en un número finito de puntos y en ellos posee límites laterales.



[No lo son las funciones $1/x$ o $\sin(1/x)$ en $[0,1]$, definámoslas como las definamos en $x=0$]

Teor: f continua a trozos en $[a,b]$ \implies f integrable en $[a,b]$



[dividimos en subintervalos de forma que f sólo tenga discontinuidades en los extremos; en cada intervalo es fácil ver que es integrable por ser suma de una función continua y de otra integrable del tipo de la g de los ejemplos].

Como es 0 el valor de la integral de una función como la g se ve que cambiando el valor de una f integrable en un número finito de puntos, la nueva función h continúa siendo integrable y el valor de la integral es el mismo, pues dicha función h se puede escribir como $f+g$ con una g de esas y sabemos que la integral es lineal.

[También existen funciones integrables con infinitas discontinuidades; por ejemplo, cualquier f creciente y acotada es integrable (pues $U_n - L_n = [f(b) - f(a)]/n$, ya que cada $M_k = m_{k+1}$, $k=0, \dots, n-1$), aunque presente infinitos saltos].

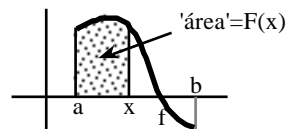
5.2. TEOREMAS FUNDAMENTALES

(relacionan derivadas e integrales)

Sea f acotada e integrable en $[a,b]$; para cada $x \in [a,b]$ la integral $\int_a^x f$ existe (y es un número).

Podemos, pues, definir una nueva función:

$$F(x) = \int_a^x f, \quad x \in [a,b]$$



Primer teorema fundamental del cálculo infinitesimal:

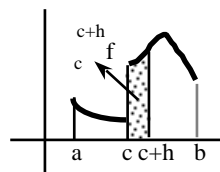
f integrable en $[a,b]$ F continua en $[a,b]$.

Si además f es continua en un $c \in (a,b)$ entonces F es derivable en c y $F'(c) = f(c)$

(y por tanto, si f es continua en todo $[a,b]$ entonces $F'(x) = f(x) \quad x \in [a,b]$)

Como f está acotada, existe K tal que $|f(x)| < K \quad x \in [a,b]$. Sea $h > 0$, entonces:

$$-Kh \leq \int_c^{c+h} f = \int_a^{c+h} f - \int_a^c f = F(c+h) - F(c) \leq Kh \quad [F(c+h) - F(c)] \rightarrow 0 \text{ si } h \rightarrow 0^+.$$



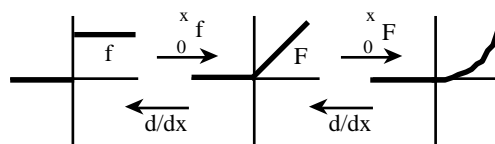
Así pues, F es continua en c (cambiando detalles se vería para $h \rightarrow 0^-$).

Sea ahora f continua en c y $h > 0$: $M_h = \sup\{f(x) : x \in [c, c+h]\}$, $m_h = \inf\{f(x) : x \in [c, c+h]\}$. Entonces:

$$m_h h \leq \int_a^{c+h} f - \int_a^c f = F(c+h) - F(c) \leq M_h h; \quad m_h \leq \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \leq M_h \quad (\text{análogo si } h < 0).$$

Como f es continua, $M_h, m_h \rightarrow f(c)$ cuando $h \rightarrow 0$, y por tanto $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c)$.

El teorema nos dice que, al contrario que al derivarla, la F obtenida integrando una f es "más suave" que ella. Aunque f sea discontinua en un c , F es continua en c (aunque F tenga "picos" en ese punto); y si una función tiene picos, desaparecen al integrarla]



Segundo teorema fundamental del cálculo infinitesimal:

Si f es continua en $[a,b]$ y $f=g'$ para alguna función g entonces $\int_a^b f = g(b) - g(a)$ $\int_a^b f = g(b) - g(a)$ (notación)

Sabemos que $F' = f = g'$; entonces será $F(x) = g(x) + k$ para algún número k . Como

$$0 = F(a) = g(a) + k \quad k = -g(a) \quad F(x) = g(x) - g(a). \text{ En particular: } F(b) = \int_a^b f = g(b) - g(a).$$

Dada una f , una g cuya derivada sea f se llama **primitiva** de f . Para calcular la integral de una f continua basta, pues, hallar una primitiva de f (y no es necesario utilizar las sumas superiores e inferiores). Si g es primitiva de f , es claro que cualquier otra primitiva de f es de la forma $g + K$.

El conjunto de todas las primitivas se designa por $\int f(x) dx$ (funciones, y no un número como $\int_a^b f$)
(a veces se llama integral definida de f entre a y b a esta última, e integral indefinida al conjunto de primitivas)

En algunos casos, hallar la primitiva de una función es inmediato y, por tanto, lo es calcular algunas integrales. Por ejemplo, es ahora ya trivial calcular la primera integral vista en 4.1:

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \text{ pues } \frac{x^3}{3} \text{ es una primitiva de } x^2 \text{ ya que } \frac{d}{dx} \frac{x^3}{3} = x^2$$

(todas las primitivas de x^2 son $x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 + K$; si para el cálculo de la integral anterior hubiésemos tomado otro valor de la $K \neq 0$, habríamos, desde luego, obtenido el mismo resultado).

Sin embargo, en muchas ocasiones el cálculo de primitivas se hace muy complicado. Más aún, hay otras funciones de apariencia sencilla para las que se puede demostrar que no existen primitivas que puedan escribirse como sumas, productos, composición, ... de funciones elementales

[por ejemplo: $\sin(x^2) dx$, $e^{x^2} dx$, $\frac{\sin x}{x} dx$, $\frac{e^x}{x} dx$, $\frac{dx}{\log x}$, $[1+x^3]^{1/2} dx$, $[1+x^2]^{1/3} dx$, ...]

Si f es continua una primitiva suya es la F (pero esto no nos sirve para calcular una integral concreta); así $F(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt$, $F^*(x) = \int_7^x \sin(t^2) dt$, ... son primitivas de $\sin(x^2)$; es decir, $\sin(x^2) dx = \int_a^x \sin(t^2) dt + K$; x, t, \dots son variables mudas, pero no se repite la letra del límite de integración en el integrando porque podría dar lugar a errores: $F(1)$ es $\int_0^1 \sin(t^2) dt$ pero no es $\int_0^1 \sin(1) dx$ y a esto nos podría llevar la notación $\int_0^x \sin(x^2) dx$]

También hay funciones integrables que no tienen primitivas (evidentemente no pueden ser continuas); por ejemplo,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x=0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} \quad \text{no es derivada de ninguna función (} F(x) = \int_a^x f \quad 0 \quad x \text{ no es primitiva de } f \text{).}$$

De los TFCI se deducen las propiedades que habíamos adelantado para el $\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}$:

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ continua si } x > 0 \quad F(x) = \log x \text{ derivable (y continua) si } x > 0 \text{ y su derivada es } f(x) = \frac{1}{x}$$

[$F'(x) = f(x)$ también si $x < a$ (si f continua en x), pues si $c < x$ con f integrable en $[c, a]$: $F(x) = \int_a^x f = \int_c^x f - \int_c^a f$]

[y también se podrían comprobar el resto de propiedades: $\log(ab) = \log a + \log b$, ...]

El 2º TFCI permite también probar con facilidad algunas de las propiedades de las integrales vistas en 5.1, en caso de que el integrando sea continuo; por ejemplo, si F y G son primitivas de f y g :

$$\begin{aligned} \int_a^b [f+g] &= [F+G](b) - [F+G](a) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \int_a^b f + \int_a^b g, \\ \int_a^b f &= F(b) - F(a) = F(b) - F(c) + F(c) - F(a) = \int_a^c f + \int_c^b f, \dots \end{aligned}$$

Recordemos que también son ciertas estas propiedades para funciones continuas a trozos. De hecho, sabemos hallar ya fácilmente integrales de muchas f de ese tipo, dividiendo el intervalo y aplicando los TFCI en cada subintervalo:

Hallems $\int_0^{\pi/2} f$, si $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ -1, & \pi/2 < x \end{cases}$

$$\int_0^{\pi/2} f = \int_0^{\pi/2} \cos x dx + \int_{\pi/2}^{\pi} [-1] dx = [\sin x]_0^{\pi/2} + [-x]_{\pi/2}^{\pi} = 1 - \frac{\pi}{2}.$$

[pues $\int_{\pi/2}^{\pi} f = \int_{\pi/2}^{\pi} [-1] dx$, ya que coinciden salvo en $x = \pi/2$]

También sabemos hallar $\int_0^{\pi} x f$ la $\int_0^{\pi} x f = \int_0^{\pi/2} x \cos x dx + \int_{\pi/2}^{\pi} x [-1] dx = \frac{\pi}{2} + 1 - x, \quad \pi/2 \leq x \leq \pi$

[función que, como nos aseguraba el primer TFCI, es continua también en $x = \pi/2$]

Como sabemos calcular derivadas de funciones definidas por integrales, sabemos hacer con ellas todo lo visto en cálculo diferencial: hallar tangentes, máximos y mínimos, límites indeterminados,...

Ejemplos. Hallems la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $F(x) = \int_{-1}^x \frac{t^3}{t^4-4} dt$ en $x=1$:

$$F'(x) = \frac{x^3}{x^4-4} \quad F'(1) = -\frac{1}{3}; \quad F(1) = \int_{-1}^1 \frac{t^3}{t^4-4} dt = 0 \text{ (integrando impar)} \quad \text{recta tangente: } y = -\frac{1}{3}[x-1].$$

[podríamos (primitiva inmediata), pero no es útil, calcular la $F(x) = \frac{1}{4}(\log|x-4| - \log 3)$]

Determinemos, si existe, el límite de $G(x) = \int_0^x \frac{|\cos t^3|}{t^2+1} dt$ cuando $x \rightarrow 0$ y cuando $x \rightarrow \infty$.

El numerador $F = \int_0^x$ es continuo (y derivable) x (por ser el integrando continuo x) y es $F(0) = \int_0^0 = 0$.

Cuando $x \rightarrow 0$ tenemos indeterminación $0/0$. Por L'Hôpital, $\lim_{x \rightarrow 0} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\cos x^3|}{x^2+1} = 1$.

Si $x \rightarrow \infty$, tal vez no valga L'Hôpital (¿tenderá F a ?). De hecho, no hay indeterminación, pues vamos a ver (a pesar de que la primitiva es de las no calculables) que la F está acotada. En efecto:

$$\int_0^{\infty} \frac{|\cos x^3|}{x^2+1} dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x \quad x \rightarrow \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} G = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan x}{x} = 0 \quad G_x \rightarrow 0.$$

En ocasiones hay que trabajar con funciones similares a la $F(x)$, definidas por integrales de funciones f continuas, pero con límites de integración que son también funciones (derivables) de x . Los TFCI también nos permiten derivarlas:

$$\text{Si } H(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f \text{ entonces } H'(x) = f[b(x)]b'(x) - f[a(x)]a'(x)$$

(para los x tales que f sea continua en $[a(x), b(x)]$) (o en $[b(x), a(x)]$ si $a(x) > b(x)$)

[prueba fácil: se escribe $H(x) = \int_0^{b(x)} f - \int_0^{a(x)} f = F[b(x)] - F[a(x)]$, con $F(x) = \int_0^x f$, y se aplica la regla de la cadena]

Por ejemplo, utilicemos lo anterior para hallar un par de derivadas de la función

$$K(x) = x \int_{2x}^{3x} e^{-t^2} dt :$$

$$K'(x) = \int_{2x}^{3x} e^{-t^2} dt + x [e^{-9x^2} \cdot 3 - e^{-4x^2} \cdot 2] \quad K''(x) = 2 [3e^{-9x^2} - 2e^{-4x^2}] + 2x^2 [8e^{-4x^2} - 27e^{-9x^2}]$$

[expresiones válidas x , tanto si es positivo como negativo]

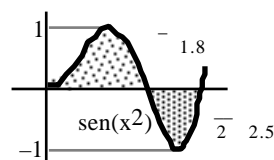
Derivemos ahora: $H(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \sin(t^2) dt$, $H'(x) = \sin[(\sqrt{x})^2] \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 0 = \frac{\sin x}{2\sqrt{x}}$ si $x > 0$.

A partir de la H' podemos hallar para qué x del intervalo $[0, 2]$ posee un máximo esta H (que lo posee por ser H continua): los candidatos son los extremos y los puntos en que $H'=0$, es decir, $x=0$, $x=$ y $x=2$. Con el signo de H' se ve que H crece antes de y decrece después, luego en ese punto se alcanza el máximo.

[También estaba claro viendo la gráfica de $f(x)=\sin(x^2)$, pues hasta $x=$ vamos añadiendo áreas positivas y a partir de entonces quitamos áreas por debajo del eje x].

Distinguir cuál de los mínimos locales es mínimo absoluto exige saber si es mayor

$$H(0)=0 \text{ ó } H(2) = \int_0^{\sqrt{2}} \sin(t^2) dt$$



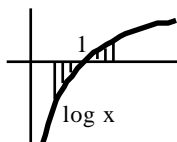
La gráfica de la f sugiere que $K(2) > 0$, pero no podemos calcular el valor exacto, por no existir la primitiva de f (ya aprenderemos a aproximar numéricamente las integrales en la última sección de este capítulo).

Probemos ahora que la función

$$L(x) = \int_{1-x}^{1+x} \log t dt$$

es decreciente en $[0, 1/2]$.

Como $\log x$ es continua en $[1/2, 3/2]$ (valores en los que integramos si $x \in [0, 1/2]$) podemos derivar la L ahí:



$$L'(x) = \log(1+x) \cdot 1 - \log(1-x) \cdot [-1] = \log[1-x^2] < 0 \text{ si } x \in [0, 1/2], \text{ pues } 1-x^2 < 1.$$

[el resultado era esperable: las áreas negativas que aparecen son mayores que las positivas]

[En este caso la primitiva sí sería calculable (por partes, como veremos), pero es un rodeo tonto hallar primitivas para derivarlas a continuación].

5.3. CÁLCULO DE PRIMITIVAS

Integrales inmediatas (o casi inmediatas).

Cada derivada conocida nos proporciona una fórmula de integración:

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x, \quad \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x, \quad \frac{dx}{[4-x]^2} = \frac{1}{4-x}, \quad \frac{2x dx}{x^2-1} = \log|x^2-1|, \dots$$

(para mayor precisión deberíamos escribir $\tan x + K$, $\operatorname{ch} x + K$, ...; no lo haremos pero tengámoslo en cuenta)

Normalmente al integrando le faltará alguna constante que se podrá calcular derivando de cabeza:

$$[1-9x^2]^{-1/2} dx = \frac{1}{3} \operatorname{arcsen}(3x), \quad x^{-5/3} dx = -\frac{3}{2} x^{-2/3}, \quad \frac{dx}{4+x^2} = \frac{dx}{4[1+(x/2)^2]} = \frac{1}{2} \operatorname{arctan} \frac{x}{2}, \dots$$

De las propiedades de **linealidad** de la derivada se deduce inmediatamente para las primitivas que:

$$[f(x)+g(x)]dx = f(x)dx + g(x)dx, \quad cf(x)dx = c \int f(x)dx$$

$$\text{Así, } [5\sqrt{x+6} + 2\operatorname{sen} x - 7^x] dx = 5 \int \sqrt{x+6} dx + 2 \int \operatorname{sen} x dx - \int 7^x dx = \frac{10}{3} [x+6]^{3/2} - 2\cos x - \frac{7^x}{\log 7}$$

Es falso que la integral de un producto sea el producto de las integrales por no serlo la derivada, pero de la fórmula del producto $(fg)' = fg' + f'g$ obtenemos:

Integración por partes: Sean f' y g' continuas (para que existan las primitivas). Entonces:

$$f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \quad \int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Esto reduce el problema a calcular otra primitiva, que será más sencilla si f' y g lo son (o si una de ellas lo es y la otra no es más complicada que la anterior).

Dada una f se suele denotar $df = f'(x)dx$; con esto, la integración por partes se suele escribir $\int u dv = uv - \int v du$

$$\int x \operatorname{sen} x dx = \left[u=x, dv=\operatorname{sen} x \quad du=dx, v=-\cos x \right] = -x \cos x - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x$$

$$\int x e^{-x} dx = \left[u=x, dv=e^{-x} dx \quad du=dx, v=-e^{-x} \right] = -x e^{-x} - \int (-e^{-x}) dx = -(x+1) e^{-x}$$

[la primitiva del seno y la exponencial son igual de complicadas que ellas, pero la derivada del x es más sencilla].

Otras funciones que mejoran al ser derivadas son los logaritmos (y las potencias de x no se complican):

$$\int \sqrt{x} \log|x| dx = \left[u=\log|x|, dv=\sqrt{x} dx \right] = \frac{2}{3} x^{3/2} \log|x| - \frac{2}{3} \int x^{3/2} \frac{dx}{x} = x^{3/2} \left[\frac{2}{3} \log|x| - \frac{4}{9} \right]$$

Algunas veces conviene tomar $g'=1$ (es decir, $dv=dx$):

$$\int \log x dx = \left[u=\log x, dv=dx \quad du=\frac{dx}{x}, v=x \right] = x \log x - \int dx = x \log x - x$$

$$\int \operatorname{arctan} x dx = \left[u=\operatorname{arctan} x, dv=dx \right] = x \operatorname{arctan} x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctan} x - \frac{1}{2} \log(x^2+1)$$

Otras veces hay que repetir la integración por partes:

$$\int_u^x x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int_u^x x e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int_u^x e^x dx = [x^2 - 2x + 2] e^x$$

$$\text{Otro truco: } \int \frac{\log x}{x} dx = \log x \log x - \int \log x \frac{1}{x} dx \quad \int \frac{\log x}{x} dx = \frac{1}{2} [\log x]^2 \quad [\text{se podía haber hecho a ojo}]$$

Combinando las dos últimas ideas:

$$I = \int_u^x \cos 2x e^x dx = \cos 2x e^x + 2 \int_u^x \operatorname{sen} 2x e^x dx = e^x [\cos 2x + 2\operatorname{sen} 2x] - 4 I \quad I = \frac{e^x}{5} [\cos 2x + 2\operatorname{sen} 2x]$$

$$\text{Curiosidad: } \int \frac{dx}{x} = \left[u=x, dv=\frac{1}{x^2} dx \quad du=dx, v=-\frac{1}{x} \right] = -1 + \frac{dx}{x} \quad \text{¿? } 0=-1 !!$$

[no olvidemos que hay una K arbitraria aunque no la escribamos]

Cambios de variable:

Supongamos que queremos hallar una primitiva de $f(g(x))g'(x)dx$ (con f y g' continuas). Si F es una primitiva de f , por la regla de la cadena: $(F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$. Así pues, $F \circ g$ es la primitiva buscada. Basta pues integrar la f y evaluar el resultado en $g(x)$. Si lo que queremos es la integral definida entre a y b su valor es $F(g(a)) - F(g(b))$. Por tanto:

$$\boxed{f(g(x))g'(x)dx = f(u)du \Big|_{u=g(x)} \quad ; \quad \int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du}$$

En la práctica se suele usar la notación de diferenciales: se escribe $u=g(x)$, $du=g'(x)dx$ y si hay límites de integración es fácil recordar que: $x=a \rightarrow u=g(a)$, $x=b \rightarrow u=g(b)$.

En algunos casos la $g'(x)$ aparece explícitamente y está muy claro el cambio que hay que hacer:

$$\int \sin^3 2x \cos 2x dx = [u = \sin 2x, du = 2 \cos 2x dx] = \frac{1}{2} \int u^3 du = \frac{1}{8} u^4 = \frac{1}{8} \sin^4 2x$$

(en casos tan sencillos no será necesario escribir la sustitución: no es difícil ver a ojo que $\sin^4 2x$ es casi la primitiva; derivándola mentalmente se ve que falta el $1/8$)

$$\int_1^5 \frac{dx}{x \log x} = [u = \log x, du = \frac{dx}{x}, x=e \rightarrow u=1, x=5 \rightarrow u=\log 5] = \int_1^{\log 5} \frac{du}{u} = \log|\log 5| - 0 = \log(\log 5)$$

[podíamos haber calculado la primitiva olvidando límites de integración y sustituir al final, una vez deshecho el cambio]

$$\int e^x \sqrt{e^x - 1} dx = [u = e^x, du = e^x dx] = \int \sqrt{u-1} du = \frac{2}{3} [u-1]^{3/2} = \frac{2}{3} [e^x - 1]^{3/2}$$

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sh}^3 x e^{-\operatorname{ch} x} dx &= [u = \operatorname{ch} x, du = \operatorname{sh} x dx, \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x - 1] = \int [u^2 - 1]e^{-u} du = [\text{partes}] = -u^2 e^{-u} + 2 \int u e^{-u} du + e^{-u} = \\ &= [\text{partes}] = [1 - 2u - u^2]e^{-u} + 2 \int e^{-u} du = -[1 + 2u + u^2]e^{-u} = -[1 + 2\operatorname{ch} x + \operatorname{ch}^2 x] e^{-\operatorname{ch} x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{o partes directamente: } \int \operatorname{sh}^3 x e^{-\operatorname{ch} x} dx &= [u = \operatorname{sh}^2 x, dv = \operatorname{sh} x e^{-\operatorname{ch} x} dx] = -\operatorname{sh}^2 x e^{-\operatorname{ch} x} + 2 \int \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x e^{-\operatorname{ch} x} dx = \\ &= [\text{partes}] = -\operatorname{sh}^2 x e^{-\operatorname{ch} x} - 2 \operatorname{ch} x e^{-\operatorname{ch} x} + 2 \int \operatorname{sh} x e^{-\operatorname{ch} x} dx = -[2 + 2\operatorname{ch} x + \operatorname{sh}^2 x] e^{-\operatorname{ch} x}) \end{aligned}$$

Pero en la mayoría de los casos no es tan evidente el cambio ni tenemos una clara du . La forma del integrando puede sugerir hacer algún cambio $u=g(x)$. Para obtener entonces la $f(u)$ se despeja la x en función de u , se calcula el dx y se sustituyen x y dx en la integral:

$$\begin{aligned} \int_4^9 \cos \sqrt{x} dx &= [u = \sqrt{x}, x = u^2, dx = 2u du, x=4 \rightarrow u=2, x=9 \rightarrow u=3] = 2 \int_2^3 u \cos u du = [\text{partes}] \\ &= 2 [u \operatorname{senu}]_2^3 - 2 \int_2^3 \operatorname{senu} du = 2 [u \operatorname{senu}]_2^3 + 2 [\cos u]_2^3 = 2 [3 \operatorname{sen} 3 - 2 \operatorname{sen} 2 + \cos 3 - \cos 2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{e^x - 1} dx &= [u = e^x, x = \log u, dx = \frac{du}{u}] = \int \frac{\sqrt{u-1}}{u} du = [\sqrt{u-1} = z, u = z^2 + 1, du = 2z dz] = 2 \int \frac{z^2}{z^2 + 1} dz = \\ &= 2 \left[1 - \frac{1}{z^2 + 1} \right] dz = 2z - 2 \arctan z = 2\sqrt{u-1} - 2 \arctan \sqrt{u-1} = 2\sqrt{e^x - 1} - 2 \arctan \sqrt{e^x - 1} \end{aligned}$$

[con un poco más de vista podríamos haber hecho directamente $z = \sqrt{e^x - 1}$ acabando antes]

Un poco de práctica sugiere qué y cuándo sustituir. Para algunos tipos particulares de funciones (trigonométricas, con radicales...) hay sustituciones típicas que se sabe que dan buen resultado. Las veremos más adelante, una vez vista la integración de funciones racionales, ya que la mayoría de los cambios están destinados a conseguir integrandos que sean cocientes de polinomios.

En los cambios de variable las funciones f y g' deben ser continuas. Esto a veces se olvida y conduce a errores:

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1 + \cos^2 x} = [u = \tan x, dx = \frac{du}{1+u^2}] \stackrel{!!}{=} \int_0^0 \frac{du}{2+u^2} = 0$$



[resultado evidentemente falso: el integrando es siempre positivo y la integral debía ser un número positivo; el cambio hecho (que es clásico, como veremos, para este tipo de integrales) es válido sólo hasta $\pi/2$; sí es cierto que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos^2 x} = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{2+u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{du}{1+[u/\sqrt{2}]^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(u/\sqrt{2}) \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

pues el integrando es simétrico respecto a $x = \pi/4$. Al $\pi/2$ que nos ha aparecido (que como siempre representará un límite) le daremos más seriedad cuando estudiemos las integrales impropias].

Primitivas de funciones racionales:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} dx, \text{ con } P \text{ y } Q \text{ polinomios}$$

Si el grado de P es que el de Q dividimos: $\frac{P}{Q} = C + \frac{R}{Q}$ con el resto R de grado menor que Q .

Sabemos que Q se puede escribir como producto de polinomios del tipo $(x-a)^m$ [raíces reales] y $(x^2+cx+d)^n$ [raíces complejas], siendo m y n la multiplicidad de las raíces [$m=1$ si son simples].

(El problema fundamental es que, salvo en polinomios especialmente sencillos o preparados, realizar esta descomposición de Q es, en la práctica, imposible (como vimos en 3.3) por ser imposible hallar sus raíces)

Se demuestra que R/Q se puede escribir como suma de múltiplos constantes de funciones del tipo:

$$\frac{1}{(x-a)^j}, \frac{1}{(x^2+cx+d)^k} \text{ y } \frac{x}{(x^2+cx+d)^k}, \text{ con } 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n \text{ (llamadas **fracciones simples**)}.$$

Para realizar esta "descomposición en fracciones simples" (para hallar la constante que acompaña a cada fracción) basta resolver un sistema lineal de ecuaciones. Por tanto, el problema de integrar P/Q se reduce, una vez factorizado Q , al de integrar el polinomio C y funciones como las últimas.

Ejemplos: $I = \int \frac{4x^4-6x^3+5x^2-11x+4}{x^5-x^4+x^3-3x^2+2x} dx = \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx \text{ (ya es } 4 < 5 \text{)}$

Factorizamos $Q(x) = x(x-1)^2(x^2+x+2)$ [suerte hemos tenido] y descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+x+2} = \frac{A(x^4-x^3+x^2-3x+2)+B(x^4+x^2-2x)+C(x^3+x^2+2x)+(Dx+E)(x^3-2x^2+x)}{x(x-1)^2(x^2+x+2)}$$

$$\left[\text{Si tuviésemos } (x-1)^m \text{ escribiríamos } \frac{B_1}{x-1} + \dots + \frac{B_m}{(x-1)^m}; \text{ si } (x^2+x-2)^n, \frac{D_1x+E_1}{x^2+x-2} + \dots + \frac{D_nx+E_n}{(x^2+x-2)^n} \right]$$

Igualando los coeficientes de x^4, x^3, x^2, x y el término independiente de ambos términos se obtiene el sistema:

$$A+B+D=4, -A+C-2D+E=-6, A+B+C+D-2E=5, -3A-2B+2C+E=-11, 2A=4$$

$$\text{Resolviéndolo: } A=2, B=1, C=-1, D=1, E=-1. \text{ Por tanto: } I = \frac{2dx}{x} + \frac{dx}{x-1} - \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{x-1}{x^2+x+2} dx$$

Las $(x-a)^{-m} dx$ son casi inmediatas. Más trabajo dan las otras: se busca un logaritmo y un arco tangente.

Para encontrar este último se completa el cuadrado: $x^2+x+2 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4} = \frac{7}{4} \left[\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}} \right)^2 + 1 \right]$. Por tanto:

$$\frac{1}{2} \frac{2x-2}{x^2+x+2} = \frac{1}{2} \frac{2x+1}{x^2+x+2} - \frac{3}{2} \frac{1}{x^2+x+2} = \frac{1}{2} \log(x^2+x+2) - \frac{3}{2} \frac{2/\sqrt{7}}{([2x+1]/\sqrt{7})^2+1}$$

$$I = 2 \log|x| + \log|x-1| + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \log(x^2+x+2) + \frac{3}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)$$

$$I = \int \frac{x^4-5x^2+x+8}{x^3+x^2-4x-4} dx = (x-1)dx + \frac{x+4}{(x+1)(x+2)(x-2)} dx \text{ [de nuevo las raíces eran sencillas].}$$

$$\frac{x+4}{(x+1)(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2} = \frac{A(x+2)(x-2)+B(x+1)(x-2)+C(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-2)}$$

Cuando hay tantas raíces reales, mejor que igualar coeficientes hacemos $x = a$ las diferentes raíces:

$$x=-1 \quad -3A=3, A=-1; \quad x=-2 \quad 4B=2, B=1/2; \quad x=2 \quad 12C=6, C=1/2$$

$$I = \frac{1}{2} x^2 - x - \log|x+1| + \frac{1}{2} \log|x+2| + \frac{1}{2} \log|x-2| = \frac{1}{2} \left[x^2 - 2x + \log \frac{|x^2-4|}{|x+1|^2} \right]$$

[Para hallar las primitivas de las fracciones simples más complicadas $(x^2+cx+d)^{-n} dx$ se utilizarían fórmulas de reducción como la propuesta en los problemas].

Muchas integrales se convierten en integrales racionales mediante cambios de variable, por ejemplo:

$$\int R(e^x) dx, \text{ función racional de } e^x, \text{ se convierte en racional haciendo } u=e^x, \text{ pues } dx = \frac{du}{u}.$$

$$\text{Ej: } \frac{dx}{1+e^{2x}} = [u=e^x] = \frac{du}{u[1+u^2]} = \left[\frac{A}{u} + \frac{Bu+C}{1+u^2} \right] = \frac{du}{u} - \frac{udu}{1+u^2} = \log u - \frac{1}{2} \log(1+u^2) = x - \log(1+e^{2x})$$

Más interés, por aparecer más a menudo, tienen las **primitivas de funciones trigonométricas**:

Para integrar $R(\sin x, \cos x) dx$, con R función racional, existe siempre un cambio $[u = \tan \frac{x}{2}]$ que la convierte en una racional. Pero veamos antes una serie de casos más fáciles:

$\boxed{\sin^m x \cos^n x dx}$ Si m o n son impares: $\sin^{2k+1} x = \sin x (1 - \cos^2 x)^k$ y se hace $u = \cos x$
 $\cos^{2k+1} x = \cos x (1 - \sin^2 x)^k$ y se hace $u = \sin x$

Si m y n son pares, se escriben en función del ángulo doble: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

Ej: $\sin^2 x \cos^3 x dx = (1 - \sin^2 x) \sin^2 x \cos x dx = [u = \sin x, \text{ o a ojo}] = (u^2 - u^4) du = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5}$
 $\cos^4 x dx = \frac{1}{4} (1 + \cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4} dx + \frac{1}{2} \cos 2x dx + \frac{1}{8} (1 + \cos 4x) dx = \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32}$

La integral más general $\boxed{R(\sin x, \cos x) dx}$ se convierte en cociente de polinomios haciendo:

$\boxed{u = \cos x}$, si R es impar en $\sin x$ [es decir, si $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$]

$\boxed{u = \sin x}$, si R es impar en $\cos x$ [es decir, si $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$]

$\boxed{u = \tan x}$ [$\cos^2 x = \frac{1}{1+u^2}$, $dx = \frac{du}{1+u^2}$], si $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$

$\boxed{u = \tan \frac{x}{2}}$ [$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$, $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $dx = \frac{2du}{1+u^2}$], para cualquier R [como último recurso]

Ejemplos: $\frac{dx}{\sin x} = \frac{\sin x dx}{1 - \cos^2 x} = [u = \cos x] = \frac{du}{u^2 - 1} = \frac{1}{2} \frac{du}{u-1} - \frac{1}{2} \frac{du}{u+1} = \frac{1}{2} \log \left| \frac{u-1}{u+1} \right| = \frac{1}{2} \log \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right|$

De otra forma: $\frac{dx}{\sin x} = [u = \tan \frac{x}{2}] = \frac{2du/[1+u^2]}{2u/[1+u^2]} = \frac{du}{u} = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right|$ [ha salido tan fácil por casualidad]

[las dos expresiones de la primitiva deben coincidir salvo K arbitraria (con pocas cuentas se ve que son iguales)]

$$\frac{dx}{\cos^3 x \sin x} = \frac{dx}{\cos^4 x \tan x} = [u = \tan x] = \frac{[1+u^2]^2 du}{u[1+u^2]} = \frac{du}{u} + u du = \log |\tan x| + \frac{1}{2} \tan^2 x$$

Otro camino (más largo): $\frac{dx}{\cos^3 x \sin x} = \frac{\sin x dx}{\cos^3 x [1 - \cos^2 x]} = [u = \cos x] = \frac{du}{u^3 [u+1][u-1]} = \dots$

[peor todavía sería hacer $u = \sin x$ (también es impar en coseno) o $u = \tan \frac{x}{2}$]

Primitivas de irracionales (las más sencillas; R es función racional de x y la raíz que se indica)

$\boxed{R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx}$, $n \in \mathbf{N}$ se convierte en racional haciendo $u = \sqrt[n]{ax+b}$.

$$x [1+x]^{1/4} dx = [u = [1+x]^{1/4}, x = u^4 - 1, dx = 4u^3 du] = 4(u^8 - u^4) du = \frac{4}{9} u^9 - \frac{4}{5} u^5 = \frac{4}{9} [1+x]^{9/4} - \frac{4}{5} [1+x]^{5/4}$$

(o se puede hacer por partes: $x [1+x]^{1/4} dx = \frac{4}{5} x [1+x]^{5/4} - \frac{4}{5} [1+x]^{5/4} dx = \frac{4}{5} x [1+x]^{5/4} - \frac{16}{45} [1+x]^{9/4}$)

$\boxed{R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx}$ se convierte en trigonométrica haciendo $x = a \sin u$.

$$\sqrt{4-x^2} dx = [x = 2 \sin u] = 4 \cos^2 u du = 2u + \sin 2u = 2u + 2 \sin u \sqrt{1 - \sin^2 u} = 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{4-x^2}$$

$\boxed{R(x, \sqrt{x^2+a}) dx}$ se convierte en racional haciendo $u = x + \sqrt{x^2+a}$.

$$\frac{dx}{x \sqrt{x^2+1}} = [u = x + \sqrt{x^2+1}, x = \frac{u^2-1}{2u}, dx = \frac{1+u^2}{2u^2} du] = \frac{2du}{u^2-1} = \log \left| \frac{u-1}{u+1} \right| = \dots = \log \left| \frac{x}{1 + \sqrt{x^2+1}} \right|$$

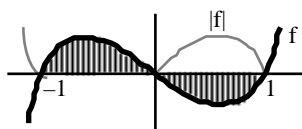
$$\frac{x dx}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} \quad [\text{¡a ojo! , antes de ponerse a calcular a lo loco, miremos si es inmediata}]$$

[las primitivas con raíces de la forma $\sqrt{ax^2+bx+c}$ se reducen a las últimas completando cuadrados]

5.4. APLICACIONES

Áreas planas.

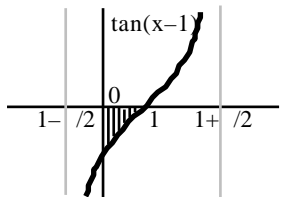
Ya vimos que la integral no describe exactamente un área, sino una suma de áreas con signo. Por tanto, para hallar el área encerrada entre el eje $y=0$ y la gráfica de una función f habrá que sumar las integrales de f en los intervalos en que esté por encima del eje y restar las integrales cuando f quede por debajo. Esto es equivalente a integrar $|f|$. Así:



Hallar el área de la región encerrada entre el eje horizontal y la gráfica de $f(x)=x^3-x$

$$\text{Área} = \int_{-1}^1 |f| = \int_{-1}^0 -f + \int_0^1 f = [f \text{ impar}] = -2 \int_0^1 f = 2 \int_0^1 (x-x^3) dx = \frac{1}{2}$$

[la integral entre -1 y 1 de f (que es 0 por ser f impar) no representa el área rayada]



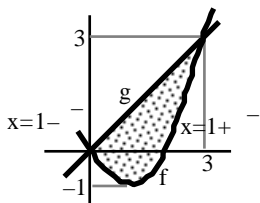
Determinar el área de la región acotada limitada por los ejes y la gráfica de $h(x) = \tan(x-1)$

[la gráfica de h , como sabemos, es la de $\tan x$ trasladada una unidad a la derecha]

$$\text{Área} = \int_0^1 |h| = - \int_0^1 \tan(x-1) dx = \left[\log |\cos(x-1)| \right]_0^1 = -\log(\cos 1) > 0 \quad (\cos 1 < 1)$$

Más en general, el área comprendida entre las gráficas de f y g en el intervalo $[a,b]$ viene dada por

$$A = \int_a^b |f-g|$$



Determinar el área de la región encerrada entre las gráficas de $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = x$

Las gráficas se cortan si $x^2 - 2x = x$, es decir si $x=0$ ($y=0$) ó si $x=3$ ($y=3$).
En $[0, -3]$ la gráfica de g está por encima de la de f , por tanto:

$$A = \int_0^3 [g-f] = \int_0^3 (3x-x^2) dx = \frac{9}{2}$$

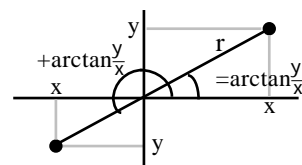
De otra forma (más complicada en este caso, pero mejor en otros): integrando respecto a y : $y = x^2 - 2x$ $x = 1 \pm \sqrt{1+y}$

$$A = \int_{-1}^0 [1 + \sqrt{1+y} - (1 - \sqrt{1+y})] dy + \int_0^3 [1 + \sqrt{1+y} - y] dy = \left[\frac{4}{3} (1+y)^{3/2} \right]_{-1}^0 + \left[y + \frac{2}{3} (1+y)^{3/2} - \frac{y^2}{2} \right]_0^3 = \frac{9}{2}$$

Áreas en coordenadas polares.

Un punto P del plano puede describirse, además de por un par de coordenadas cartesianas (x,y) , por un par de coordenadas polares (r, θ) siendo r la distancia de P al origen y el ángulo en radianes comprendido entre el semieje de las x positivas y la semirrecta que une el origen con P . Unas coordenadas se pueden obtener de otras utilizando que:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x} \quad \left[+ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right], \text{ si } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \left[\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right) \right]$$



Para hallar el área de una región R como la del dibujo, acotada por las semirrectas $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ y la curva $r=f(\theta)$, con $f(\theta) > 0$, dividamos el ángulo $\beta - \alpha$ en n partes iguales (de longitud $\Delta \theta$). Como el área de un sector circular de radio r y ángulo es $r^2/2$, si m_k y M_k son el mínimo y el máximo de $f(\theta)$ en cada sectorcillo, se tiene que el área de cada uno de ellos está comprendida entre

$$\frac{1}{2} m_k^2 \Delta \theta \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} M_k^2 \Delta \theta \quad \frac{1}{2} m_k^2 \Delta \theta \leq \text{área de } R \leq \frac{1}{2} M_k^2 \Delta \theta$$

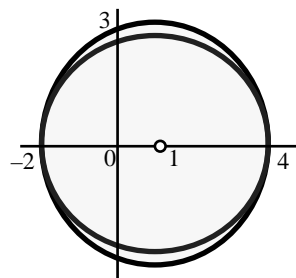
Como estas sumas son las sumas inferior y superior de f^2 en $[\alpha, \beta]$ deducimos que:

$$\text{Área de } R = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} [f(\theta)]^2 d\theta$$

Hallar el área de la región acotada por la curva $r=3+\cos \theta$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [3+\cos \theta]^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [9+6\cos \theta + \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)] d\theta = \frac{19}{2}$$

[R no es el círculo de centro $(1,0)$ y radio 3 ; el área de este círculo es 9 y su expresión en polares es $r^2 - 2r \cos \theta - 8 = 0$ $r = \cos \theta + \sqrt{\cos^2 \theta + 8}$; la curva dada en cartesianas es muy complicada: $x^2 + y^2 - x = 3\sqrt{x^2 + y^2}$].



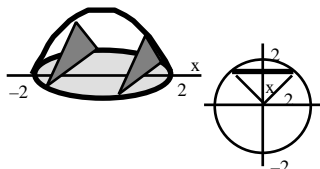
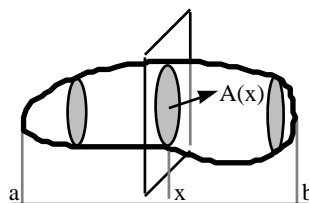
Con técnicas similares a las utilizadas para el área en polares se deducen el resto de fórmulas de la sección:

Volúmenes (sencillos):

Aunque el instrumento natural para calcular volúmenes son las integrales múltiples que se estudian en Cálculo II, hallamos algunos para los que bastan integrales de funciones de una variable.

Volumen de un sólido conocida el área de cada sección plana: $V = \int_a^b A(x) dx$

[el sólido se extiende desde $x=a$ hasta $x=b$ y el área de cada sección es $A(x)$]

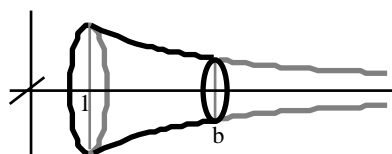
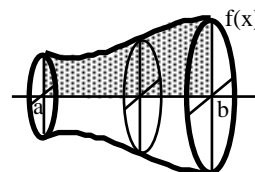


Un sólido tiene base circular de radio 2. Cada sección producida por un plano perpendicular a un diámetro fijo es un triángulo equilátero. Calcular el volumen del sólido.

$$A(x) = \text{área triángulo de base } 2\sqrt{4-x^2} = \sqrt{3}(4-x^2) \quad V = 2\sqrt{3} \int_0^2 (4-x^2) dx = \frac{32}{3}\sqrt{3}$$

En particular, volumen de un sólido de revolución engendrado al girar en torno al eje x la región comprendida entre la gráfica de f ($f(x) \geq 0$) y el eje x en $[a,b]$. El área de cada sección [círculo de radio $f(x)$] es $A(x) = [f(x)]^2$. Por tanto:

$$\text{Volumen} = V = \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

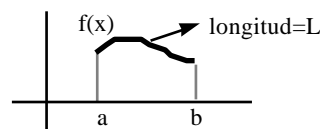


Calcular el volumen obtenido al girar la región determinada por $g(x) = 1/x$ y el eje x en el intervalo $[1, b]$, $b > 1$.

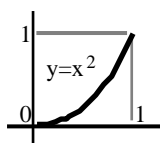
$$V_b = \int_1^b \left[\frac{1}{x}\right]^2 dx = \left[1 - \frac{1}{b}\right]$$

[Obsérvese que si $b \rightarrow \infty$, V_b converge; el volumen del sólido infinito es finito (será integral impropia convergente)]

Longitud de la gráfica de f en el intervalo $[a,b]$: $L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx$



(lo natural es probar esta fórmula al estudiar las integrales de línea de Cálculo II)

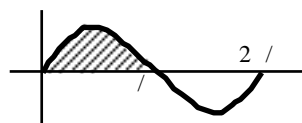
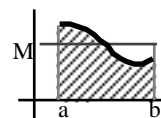


Hallar la longitud del tramo de la parábola $y=x^2$ que une los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2} dx = \left[u = 2x + \sqrt{1+4x^2} \right] = \frac{1}{8} \left[\frac{2+\sqrt{5}}{1} \frac{(1+u^2)^2}{u^3} du \right] = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\log(2+\sqrt{5})}{4} \approx 1.48$$

Valor medio de una función en un intervalo; se define: $M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

(si $f \geq 0$ es la altura de un rectángulo de base $b-a$ y área igual a la limitada por la gráfica de f)

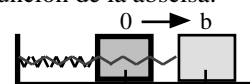


Hallar el valor medio de $f(x) = A \text{ sen } x$ en el semiperíodo $[0, \pi/2]$

$$M = \frac{1}{\pi/2 - 0} \int_0^{\pi/2} A \text{ sen } x dx = \frac{2A}{\pi} \quad (\text{el valor medio en } [0, \pi/2] \text{ es } 0)$$

Trabajo de una fuerza variable: un punto se mueve en el eje x sometido a una fuerza $f(x)$ función de la abscisa.

El trabajo realizado por la fuerza f para mover el punto desde a hasta b es $T = \int_a^b f(x) dx$



Por ejemplo, el T preciso para estirar un muelle una longitud b desde su posición de equilibrio es $\int_0^b cx dx = \frac{1}{2} cb^2$

Sea una varilla de densidad lineal variable $\rho(x)$ que ocupa desde a hasta b . Su **masa** m , su **centro de gravedad** x^* y su **momento de inercia** I respecto a 0 son: $m = \int_a^b \rho(x) dx$, $x^* = \frac{1}{m} \int_a^b x \rho(x) dx$, $I = \int_a^b x^2 \rho(x) dx$.

Distancia recorrida en el intervalo de tiempo $[a,b]$ por un móvil de velocidad $v(t)$: $D = \int_a^b v(t) dt$

5.5. INTEGRALES IMPROPIAS

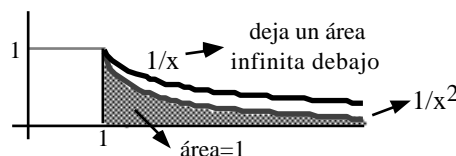
La integral la hemos definido para funciones f acotadas en intervalos $[a, b]$ finitos.

Extendemos la definición, primero para intervalos de integración no acotados $[a, \infty)$ ó $(-\infty, b]$. Como siempre que aparece un ∞ aparecerá un límite en la definición:

Supongamos que $\int_a^b f$ existe para todo $b > a$. Si existe el $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f$ se le llama integral impropia de f en $[a, \infty)$, se representa por $\int_a^\infty f$ ó $\int_a^\infty f(x)dx$ y la integral impropia se dice convergente. Si $\int_a^\infty f$ no es convergente, se dice divergente. [Análogamente se define $\int_{-\infty}^b f = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f$].

[La integral entre a y b existe $\forall b$, como sabemos, si por ejemplo f es continua (o continua a trozos) en $[a, b]$; como para cada b la integral es un número, tenemos una función de b y tiene sentido hablar de su límite cuando $b \rightarrow \infty$; este límite (el valor de la integral impropia) será otro número si la integral converge].

Ej: $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{b}\right] = 1$
 [la integral es convergente y su valor es 1]
 $\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} [\log x]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} [\log b]$ diverge



En general, como es fácil comprobar, $\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}$ diverge si $s \leq 1$ y converge si $s > 1$ [hacia $\frac{1}{s-1}$]

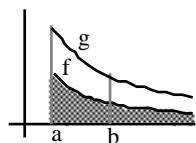
[y lo mismo sucede con $\int_a^\infty \frac{dx}{x^s}$, $a > 0$, pues $\int_1^b \frac{dx}{x^s}$ e $\int_a^b \frac{dx}{x^s}$ son dos funciones de b que sólo difieren en la constante $\frac{1}{s-1}$]

$\int_0^\infty e^{ax} dx = \frac{1}{a} \lim_{b \rightarrow \infty} [e^{ax}]_0^b = \frac{1}{a} \lim_{b \rightarrow \infty} [e^{ab} - 1]$ converge si $a < 0$ [hacia $-\frac{1}{a}$] y diverge si $a \geq 0$.

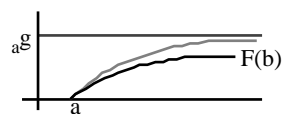
[Para abreviar se suele escribir $[e^{ax}]_0^\infty$ en lugar del $\lim_{b \rightarrow \infty} [e^{ax}]_0^b$; pero no olvidemos que se trata de un límite]

Aunque no sepamos calcular la primitiva podremos, en ocasiones, determinar si es o no convergente (como en series; incluso teníamos un criterio integral que relaciona unas y otras; los criterios son muy parecidos):

Criterios de convergencia para funciones positivas (los damos para \int_a^∞ ; son análogos para $\int_{-\infty}^b$).



En todos suponemos que las funciones que aparecen son integrables en $[a, b] \forall b$.
 Teor: Si $0 < f(x) \leq g(x)$ para $x \geq a$, $\int_a^\infty g$ converge $\Rightarrow \int_a^\infty f$ converge e $\int_a^\infty f$ diverge $\Rightarrow \int_a^\infty g$ diverge
 [y por tanto $\int_a^\infty f$ divergente $\Leftrightarrow \int_a^\infty g$ divergente]



$0 < F(b) = \int_a^b f \leq \int_a^b g \leq \int_a^\infty g < \infty$
 $F(b)$ tiene límite si $\int_a^\infty g$ converge (la última se prueba como en las sucesiones)

Las comparaciones con \int_a^∞ son siempre más complicadas que las por paso al límite:

Teor: Si f y g son positivas para $x \geq a$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c$ finito, entonces:
 si $c > 0$, $\int_a^\infty g$ convergente $\Rightarrow \int_a^\infty f$ convergente
 si $c = 0$, $\int_a^\infty g$ convergente $\Rightarrow \int_a^\infty f$ convergente [$\int_a^\infty f$ divergente $\Rightarrow \int_a^\infty g$ divergente]

Si $c > 0$, para $x > M$: $\frac{c}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{3c}{2} \Rightarrow \frac{c}{2} g(x) \leq f(x) \leq \frac{3c}{2} g(x)$ y se aplica el teorema anterior

Si $c = 0$, para $x > M$: $0 \leq f(x) \leq g(x)$ y de nuevo el teorema. (Está claro que $\int_a^\infty f$ conv $\Rightarrow \int_a^\infty g$ conv)

Si la función del integrando f **no es positiva**, como en las series, conviene considerar el $|f|$:

Teor: $\int_a^\infty |f|$ convergente $\Rightarrow \int_a^\infty f$ convergente [$\int_a^\infty f$ se dice absolutamente integrable en $[a, \infty)$]

$0 \leq f+|f| \leq 2|f|$ $\int_a^\infty [f+|f|]$ convergente $\Rightarrow \int_a^\infty f = \int_a^\infty [f+|f|] - \int_a^\infty |f|$ convergente

Ejemplos: $\int_3^{\infty} \frac{[\log x]^2}{x} dx$ diverge, pues si $x \geq 3$ es $\frac{[\log x]^2}{x} \geq \frac{1}{x}$ e $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x}$ diverge.

Por el paso al límite debemos utilizar la parte con $c=0$ porque el \log no se parece a ningún x^s :

$$\frac{1/x}{[\log x]^2/x} = 0 \text{ e } \int_3^{\infty} \frac{dx}{x} \text{ divergente} \quad \int_3^{\infty} \frac{[\log x]^2}{x} dx \text{ diverge (mayor que divergente).}$$

También nos bastaba la definición: $\int_3^{\infty} \frac{[\log x]^2}{x} dx = \frac{1}{3} [\log x]^3 \Big|_3^{\infty}$.

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^5+x+1}} \sim \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} \text{ convergente [es decir, } \frac{x/\sqrt{x}}{1/x^{3/2}} \sim 1 \text{]} \quad \text{la dada converge (no sabemos a qué número).}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \text{ (sin primitiva elemental) converge [con integrales dobles se puede ver que } \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \text{],}$$

pues $e^{-x^2}/e^{-x} = e^{x-x^2} \rightarrow 0$ y sabemos que $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$ es convergente. O bien, por desigualdades:

$$\text{si } x \geq 1 \text{ es } e^{-x^2} \leq e^{-x} \text{ e } \int_1^{\infty} e^{-x} dx \text{ converge (} \int_0^{\infty} \text{ converge)} \quad \int_0^1 e^{-x^2} dx \text{ converge (} \int_0^1 \text{ converge).}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx \sim \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} \text{ divergente [pues } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin[1/x]}{1/x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1 \text{]} \quad \text{la dada diverge.}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^3} dx \text{ es convergente porque } \left| \frac{\sin x}{1+x^3} \right| \leq \frac{1}{1+x^3} \text{ e } \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3} \text{ converge (} \sim \frac{1}{x^3} \text{ cuando } x \rightarrow \infty \text{)}$$

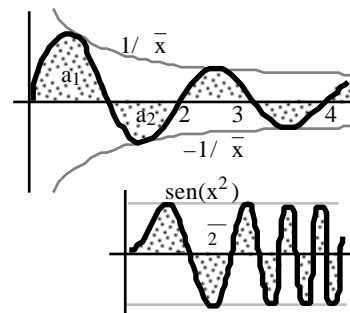
Aplicando la misma idea a $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ no concluimos nada, pues $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ diverge.

$$\text{Pero } \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^2 + \int_2^{\infty} = \dots \quad \int_{k-1}^k \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx, \text{ con } |a_k| = \frac{1}{\sqrt{k-1}} \left| \int_{k-1}^k \sin x dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{k-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k-1}} = \frac{1}{k-1}.$$

La serie es alternada, decreciente y con $|a_k| \leq 2[\sqrt{k} - \sqrt{k-1}] \rightarrow 0$,
con lo que por Leibniz converge (y por tanto la integral).

$$\text{De aquí deducimos que } \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx = \left[t=x^2 \right] = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt \text{ también converge}$$

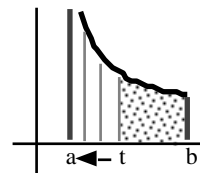
(¡a pesar de que $f(x)$ no tiende a 0 si $x \rightarrow \infty$! [esto no es como en las series]).



La segunda extensión de la definición de integral es para f no acotada en un extremo del intervalo:

Supongamos que $\int_t^b f$ existe para todo $t \in (a, b]$. Se define $\int_a^b f = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f$ si el límite existe y en ese caso la integral impropia se dice convergente. [Análogamente: $\int_a^b f = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_t^a f$]

(en vez de a^+ y b^- se escribe muchas veces a y b ; no olvidemos que la integral es impropia) (no se pide que f esté acotada en $(a, b]$, ni siquiera que esté definida en el punto a ; para que f sea integrable en $[t, b]$, debe, desde luego, estar acotada en cada intervalo de esa forma; por ejemplo, si f es continua en $(a, b]$ se tiene, para todo t , garantizada la existencia de la integral de f en $[t, b]$, aunque el límite puede no existir y divergir la integral impropia)



$$\text{Ej: } \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{t} - 1 \right] \text{ no (diverge); } \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} [2\sqrt{t}] = 2, \text{ converge.}$$

En general, se ve fácil que

$$\int_a^b \frac{dx}{[x-a]^s} \text{ e } \int_c^a \frac{dx}{[x-a]^s} \text{ convergen si } s < 1 \text{ y divergen si } s \geq 1$$

[la de a^- , cuando tiene sentido; si $s=1/3, 2/7, \dots$; si $s=1/2$ o $s=1$ la función no está definida]

Para este segundo tipo de integrales impropias existen criterios de convergencia totalmente análogos a los vistos para las del primer tipo. Resumiendo (las de a^+) y sin demostraciones:

Teor:

Si $0 \leq f \leq g$ en $(a, b]$, $\int_a^b g$ convergente $\Rightarrow \int_a^b f$ convergente e $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
Sean $f, g \geq 0$ en $(a, b]$ y sea finito el $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = c$, entonces:
si $c > 0$, $\int_a^b g$ converge $\Rightarrow \int_a^b f$ converge; si $c = 0$, $\int_a^b g$ converge $\Rightarrow \int_a^b f$ converge.
 $\int_a^b |f|$ convergente $\Rightarrow \int_a^b f$ convergente.

Ejemplos: $\int_0^+ \frac{\cos^2 x}{x^{3/4}} dx$ converge, pues $0 < \frac{\cos^2 x}{x^{3/4}} \leq \frac{1}{x^{3/4}}$ e $\int_0^+ \frac{dx}{x^{3/4}}$ convergente (o porque $\frac{\cos^2 x/x^{3/4}}{1/x^{3/4}} \rightarrow 1$).

$\int_2^+ \frac{dx}{x^3-8}$ diverge, pues se parece cerca de $x=2$ a $\int_2^+ \frac{dx}{x-2}$ divergente $\left[\frac{1/[x^3-8]}{1/[x-2]} = \frac{1}{x^2+2x+4} \rightarrow \frac{1}{12} \text{ o L'Hôpital} \right]$.

$\int_0^+ \frac{dx}{\sin x}$. Cerca de 0 el $\sin x \sim x$: $\frac{1/\sin x}{1/x} \rightarrow 1$ si $x \rightarrow 0$. Como $\int_0^+ \frac{dx}{x}$ diverge, la dada diverge.

La $\int_0^+ \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ de antes, no plantea problemas en 0, pues se parece a \sqrt{x} que no sólo es integrable, es continua.

Hay otras integrales que reúnen más de un tipo de impropiedad: \int_a^b , \int_a^+ , \int^-b , ...

Cada integral de estas se dice convergente si, dividido el intervalo en subintervalos tales que en cada uno de ellos haya una única impropiedad, todas las integrales resultantes convergen. Por ejemplo:

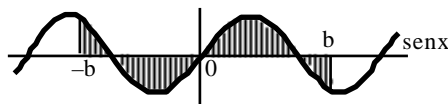
$$\int_a^b f \text{ es convergente} \iff \int_a^0 f \text{ e } \int_0^b f \text{ son convergentes y su valor es } \int_a^b f = \int_a^0 f + \int_0^b f$$

[esta integral no se define como $\lim_{b \rightarrow 0} \int_{-b}^b f$ que podría existir a pesar de ser $\int_a^b f$ divergente; a ese límite de las integrales calculadas en intervalos simétricos $[-b, b]$, si existe, se le llama valor principal de Cauchy de la integral]

Ej: $\int_a^b \sin x dx$ es divergente pues $\int_0^b \sin x dx = \lim_{b \rightarrow 0} [1 - \cos b]$ no existe (y tampoco existe $\int_a^0 \sin x dx$).

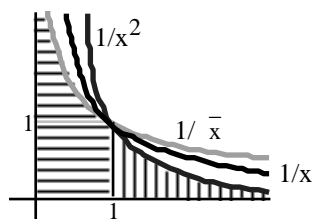
[Sin embargo sí existe el valor principal de Cauchy:

$$VP \int_a^b \sin x dx = \lim_{b \rightarrow 0} \int_{-b}^b \sin x dx = 0 \text{ (el seno es impar)]}$$

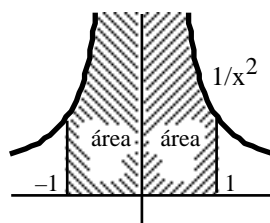


$\int_0^+ \frac{\arctan x}{x+x^2} \cdot 1$ es convergente pues se parece a $\int_1^+ \frac{dx}{x^2}$ convergente $\left[\frac{\arctan x/[x+x^2]}{1/x^2} \rightarrow \frac{1}{2} \text{ si } x \rightarrow \infty \right]$

Cerca de 0: $\frac{\arctan x}{x+x^2} \sim \frac{1}{1+x}$ tiene límite finito $\int_0^+ \frac{1}{1+x} dx$ converge. Como convergen las dos, \int_0^+ converge.



$\int_0^+ \frac{dx}{x^s} = \int_0^+ \frac{1}{x^s} dx$ diverge s
(si $s > 1$ converge la de \int_1^+ ,
pero diverge la de \int_0^+ ,
si $s < 1$ ocurre al revés y
si $s = 1$ divergen ambas)



$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ no es una integral normal y ni siquiera existe como impropia, pues no convergen ni $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2}$ ni $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$

(y ni siquiera existe el VP de Cauchy de la integral impropia, definido en estos casos por $\lim_{b \rightarrow 0} \left[\int_{-b}^0 f + \int_0^b f \right]$)

$\int_1^+ \frac{x dx}{\sqrt{x^4-1}} \cdot \frac{2}{1}$ converge (pues $\frac{x}{\sqrt{x-1}\sqrt{x^3+x^2+x+1}} \sim \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$), pero \int_2^+ diverge (pues $\frac{x}{\sqrt{x^4-1}} \sim \frac{1}{x}$).

Por tanto, la inicial diverge (insistimos en que deben converger las dos para que sea convergente).

$\int_0^+ \frac{1-e^{-x^2}}{x^2} dx$ converge: \int_0^+ converge por tener límite en $x=0$, e \int_1^+ converge por ser $0 < \frac{1-e^{-x^2}}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$.

$\Gamma(x) = \int_0^+ t^{x-1} e^{-t} dt$. En $x=0$ converge si y sólo si $x > 0$ (pues se parece a $\int_0^+ t^{x-1} dt$).

En $x > 0$ converge siempre: $\frac{t^{x-1} e^{-t}}{t^{-2}} = \frac{t^{x+1}}{e^t} \rightarrow 0$ si $x > -1$ $\int_1^+ t^{-2} dt$ converge. La Γ inicial converge $x > 0$.

[La $\Gamma(x)$ (**función gamma**) generaliza el factorial: $\Gamma(x+1) = \int_0^+ t^x e^{-t} dt \stackrel{\text{partes}}{=} -t^x e^{-t} \Big|_0^+ + x \int_0^+ t^{x-1} e^{-t} dt = x \Gamma(x)$
y por tanto $\Gamma(n+1) = n \Gamma(n) = n(n-1) \Gamma(n-1) = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1 \Gamma(1) = n!$ si $n \in \mathbf{N}$, pues $\Gamma(1) = \int_0^+ t^0 e^{-t} dt = 1$]

$\int_0^+ \frac{1-\cos x}{x^3 \log x} dx$. Plantea problemas en 0^+ , 1^\pm , ∞ . Para converger, deben hacerlo las cuatro. Analizamos todas:

0^+ : $\sim \frac{dx}{x \log x} = \log(|\log x|)$ $\int_0^+ \frac{dx}{x \log x}$ (diverge); 1^\pm : $\sim \frac{dx}{\log x} \sim \frac{dx}{x-1}$ (divergen); ∞ : $\frac{dx}{x^3}$ (converge).

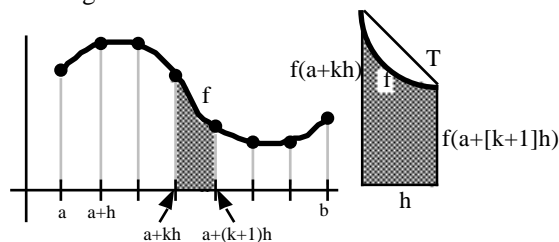
5.6. INTEGRACIÓN APROXIMADA

Funciones integrables pueden no tener primitivas elementales o ser muy largo calcularlas. Sin embargo, es fácil obtener fórmulas sencillas (sobre todo para los ordenadores) que nos dan el valor aproximado de una integral definida sin integrar. Las U_n y L_n nos daban ya alguna estimación, pero son más prácticos los siguientes métodos:

Fórmula de los trapecios:

Dividimos $[a, b]$ en n partes iguales de anchura $\frac{b-a}{n} = h$.

Como aproximación de $\int_a^{a+[k+1]h} f$ podemos tomar el área del trapecio T de la figura: $\frac{h}{2} [f(a+kh) + f(a+[k+1]h)]$.



Entonces $\int_a^b f$ será aproximadamente igual a la suma de las áreas de los n trapecios:

$$\int_a^b f \approx \frac{h}{2} [f(a) + f(a+h)] + \frac{h}{2} [f(a+h) + f(a+2h)] + \cdots + \frac{h}{2} [f(a+[n-1]h) + f(a+nh)] = \frac{h}{2} [f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \cdots + 2f(a+[n-1]h) + f(b)]$$

Fórmula de Simpson:

Una aproximación mejor se tendrá si, dividido $[a, b]$ en un número par $n=2m$ de partes iguales de longitud $h = (b-a)/n = (b-a)/2m$, en vez de sustituir cada trozo de f por una recta, la sustituimos por la parábola que interpola la gráfica de f en tres puntos consecutivos:

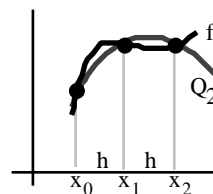
$$x_0 = a+kh, \quad x_1 = a+[k+1]h = x_0+h, \quad x_2 = a+[k+2]h = x_0+2h,$$

es decir, por el polinomio: $Q_2(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)(x-x_1)$,

con: $A_0 = f(x_0)$, $A_1 = [f(x_1) - f(x_0)]/h$, $A_2 = [f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)]/2h^2$.

Integrando Q_2 , se tiene tras algunos cálculos:

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} f \approx \int_{x_0}^{x_0+2h} Q_2(x) dx = 2hA_0 + 2h^2A_1 + \frac{2}{3}h^3A_2 = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_0+h) + f(x_0+2h)]$$



Sumando las m integrales anteriores obtenemos:

$$\int_a^b f \approx \frac{h}{3} [f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + 2f(a+4h) + \cdots + 4f(a+[n-1]h) + f(b)]$$



[Para aplicar cualquiera de los dos métodos no tenemos ni que tener la expresión analítica de f ; nos bastan algunos de sus valores; esta es la situación que experimentalmente se presenta en muchos casos]

Si se quiere utilizar con seriedad un método numérico se debe hablar del error cometido. Demos algún resultado sin demostración. La estimación por trapecios es exacta si $f(x)$ es una recta, función con $f''=0$. No es de extrañar que el error dependa de f'' . Puede probarse que si $|f''(x)| \leq M_2$ para $x \in [a, b]$ entonces:

$$|\text{error}| \leq \frac{1}{12} (b-a) M_2 h^2$$

Se prueba que Simpson es exacto si $f(x) = a+bx+cx^2+dx^3$ y que si $|f^{(4)}(x)| \leq M_4$ para $x \in [a, b]$ es:

$$|\text{error}| \leq \frac{1}{180} (b-a) M_4 h^4$$

Se ve que ambos métodos mejoran, como era esperable, cuando $h \rightarrow 0$, más rápidamente Simpson ya que h^4 tiende más fuertemente a 0 que h^2 . Como las cuentas a realizar en ambos casos son casi las mismas, será mejor acudir a Simpson si tenemos que aproximar una integral (hay métodos mucho mejores, pero también más complicados).

Un primer ejemplo poco práctico, para comparar y ver si funcionan los métodos. Aproximemos $\int_0^1 \frac{4dx}{1+x^2}$ ($= \pi$):

$$\text{T. } h=\frac{1}{2}, n=2: \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx \approx \frac{4}{4} [1 + 2 \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{2}] = \frac{31}{10} = 3.1; \quad h=\frac{1}{4}, n=4: \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx \approx \frac{4}{8} [1 + 2 \cdot \frac{16}{17} + 2 \cdot \frac{4}{5} + 2 \cdot \frac{16}{25} + \frac{1}{2}] = 3.1312$$

$$\text{S. } h=\frac{1}{2}, n=2: \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx \approx \frac{4}{6} [1 + 4 \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{2}] = \frac{47}{15} = 3.13; \quad h=\frac{1}{4}, n=4: \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx \approx \frac{4}{12} [1 + 4 \cdot \frac{16}{17} + 2 \cdot \frac{4}{5} + 4 \cdot \frac{16}{25} + \frac{1}{2}] = 3.14157$$

Otro ejemplo (ya útil): calculemos aproximadamente $\int_0^1 \sin x^2 dx$ (la función no tiene primitiva elemental).

Trapezios

$$\begin{aligned} h=\frac{1}{2}, n=2 & \quad \frac{1}{0} \quad \frac{1}{4} [0+2\sin\frac{1}{4}+\sin 1] \quad 0.334 \\ h=\frac{1}{4} & \quad \frac{1}{0} \quad \frac{1}{8} [0+2\sin\frac{1}{16}+2\sin\frac{1}{4}+2\sin\frac{9}{16}+\sin 1] \quad 0.316 \\ h=\frac{1}{6} & \quad \frac{1}{0} \quad \frac{1}{12} [0+2\sin\frac{1}{36}+2\sin\frac{1}{9}+\dots+\sin 1] \quad 0.313 \\ h=\frac{1}{100}, n=100 & \quad \frac{1}{0} \quad 0.3105 \\ h=\frac{1}{1000}, n=1000 & \quad \frac{1}{0} \quad 0.31026839 \end{aligned}$$

Simpson

$$\begin{aligned} (m=1) & \quad \frac{1}{0} \quad \frac{1}{6} [0+4\sin\frac{1}{4}+\sin 1] \quad 0.305 \\ & \quad \frac{1}{0} \quad \frac{1}{12} [0+4\sin\frac{1}{16}+2\sin\frac{1}{4}+4\sin\frac{9}{16}+\sin 1] \quad 0.3099 \\ & \quad \frac{1}{0} \quad \frac{1}{18} [0+4\sin\frac{1}{36}+2\sin\frac{1}{9}+\dots+\sin 1] \quad 0.310205 \\ & \quad \frac{1}{0} \quad 0.3102683009 \\ & \quad \frac{1}{0} \quad 0.3102683017 \end{aligned}$$

[estos últimos valores exigen, desde luego, o una enorme paciencia o un ordenador o calculadora programable]

$$\begin{aligned} \text{Como } f''(x) = 2\cos x^2 - 4x^2 \sin x^2, \quad f^{(4)}(x) = (16x^4 - 12)\sin x^2 - 48x^2 \cos x^2, \text{ en } [0,1] \text{ es} \\ |f''| \leq 6, \quad |f^{(4)}| \leq 4|4x^4 - 3| + |48x^2| \leq 60 \quad |\text{errorT}| \leq \frac{1}{2}h^2; \quad |\text{errorS}| \leq \frac{1}{3}h^4 \end{aligned}$$

Integración de series de Taylor.

Para algunas funciones es posible calcular su integral aproximada utilizando series de Taylor. De la misma forma que las series de Taylor (dentro del intervalo de convergencia) se podían derivar término a término, vamos a demostrar que se pueden integrar término a término dentro de dicho intervalo. Esto será consecuencia de los siguientes resultados:

Teor: Sea $\{f_n\}$ sucesión de funciones continuas que converge uniformemente hacia f en $[a,b]$.
Entonces $\int_a^b f = \lim_n \int_a^b f_n$

Sea $\epsilon > 0$. Existe un N tal que si $n > N$ entonces $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon/(b-a)$ para todo $x \in [a,b]$.

$$\text{Si } n > N, \quad \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| = \left| \int_a^b [f(x) - f_n(x)] dx \right| < \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx < \epsilon \int_a^b \frac{1}{(b-a)} dx = \epsilon.$$

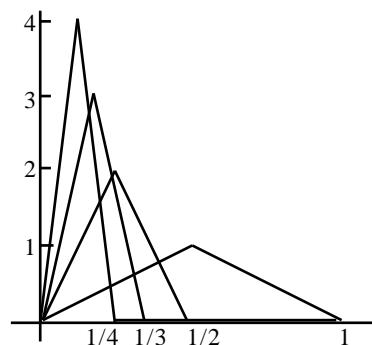
Este resultado es falso si la sucesión de funciones converge sólo puntualmente (el límite de las integrales puede ser distinto de la integral del límite) como muestra la siguiente sucesión de funciones:

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2x, & 0 \leq x \leq 1/2n \\ 2n - 2n^2x, & 1/2n \leq x \leq 1/n \\ 0, & 1/n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

(cada gráfica es un triángulo isósceles de altura n sobre el intervalo $[0, 1/n]$ y vale 0 en el resto de $[0,1]$; el área encerrada por cada f_n es $1/2$ para todo n)

El límite puntual de las f_n es $f(x)=0$ $x \in [0,1]$ ya que para cada x a partir de un N todas las $f_n(x)=0$ y $f_n(0)=0$ $\forall n$. Por tanto tenemos:

$$0 = \int_0^1 \lim_n f_n = \lim_n \int_0^1 f_n = 1$$



Como consecuencia inmediata de lo anterior, tenemos que:

$$\text{Si } f_n \text{ converge uniformemente hacia } f \text{ en } [a,b] \text{ entonces } \int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n$$

Por ejemplo, si $f(x) = \frac{\sin nx}{n^2}$ (converge uniformemente en todo \mathbf{R}), se tiene que $\int_0^1 f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{\sin nx}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{[2n-1]^3}$

Y en el caso particular de las series de potencias concluimos:

$$\text{Si } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ para } |x| < R \quad \int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} = a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{3} a_2 x^3 + \dots$$

Pues en $[-x, x]$ sabemos que la serie converge uniformemente.

Ejemplos. Para la $f(x) = \sin x^2$, aproximada antes por Trapecios y Simpson, tenemos entonces que:

$$\int_0^x \sin t^2 dt = \int_0^x \left[t^2 - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^{10}}{5!} - \frac{t^{14}}{7!} \right] dt = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^{11}}{1320} - \frac{x^{15}}{75600} + \dots \right] x$$

$\int_0^1 \sin t^2 dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} - \frac{1}{75600} + \dots$ y podemos aproximarla con las sumas parciales de esta serie alternada:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin t^2 dt &= \frac{1}{3} - \frac{1}{42} = 0.3095 \text{ con error menor que } \frac{1}{1320} = 0.0007 < 10^{-3} \\ \int_0^1 \sin t^2 dt &= \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} = 0.310281 \text{ con error menor que } \frac{1}{75600} = 0.000013 \sim 10^{-5} \\ \int_0^1 \sin t^2 dt &= \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} - \frac{1}{75600} = 0.310268158 \text{ con error menor que } \frac{1}{6894720} = 0.000000145 \sim 10^{-7} \end{aligned}$$

Con la misma serie de potencias podemos calcular la integral para cualquier otro x . Por ejemplo, si $x=1/2$:

$$\int_0^{1/2} \sin t^2 dt = \frac{1}{24} - \frac{1}{5376} + \frac{1}{2703360} - \frac{1}{2477260800} + \dots$$

serie que converge mucho más rápidamente (estamos más cerca del origen y se parece más el desarrollo).

[Como disponemos de su desarrollo de Taylor, aparte de las anteriores aproximaciones numéricas, podemos realizar otras operaciones en la que aparezca la integral, como, por ejemplo, calcular algún límite indeterminado:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \int_0^x \sin t^2 dt - x^4}{\arctan[x^8]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x^4 - \frac{1}{14} x^8 + \dots] - x^4}{x^8 - \frac{1}{3} x^{24} + \dots} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{14} x^8 + o(x^8)}{x^8 + o(x^8)} = -\frac{1}{14}$$

$$(\text{por L'Hôpital más largo: } \lim_{x \rightarrow 0} [1+x^{16}]^{\frac{3 \int_0^x \sin t^2 dt + 3x \sin x^2 - 4x^3}{8x^7}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin x^2 + 6x^2 \cos x^2 - 12x^2}{56x^6} = \dots)$$

La necesidad de aproximar una integral (o de dar cotas a su valor) surge en muchos problemas. En los siguientes (además de repasar temas anteriores) estimaremos el valor de varias utilizando Taylor, Simpson,... (u otras ideas):

Hallar (sin calculadora) con un error menor que 0.04 el valor aproximado del área de la región comprendida entre la gráfica de $h(x) = \arctan(x^2)$ y la recta $y = 1/4$.

h par, $h_{|x|} = \frac{2x}{1+x^4}$ (crece si $x>0$), corta $y=1/4$ sólo si $x=\pm 1$

Área $= \frac{1}{2} - 2 \int_0^1 \arctan(x^2) dx$. Hallar la primitiva es posible pero largo:

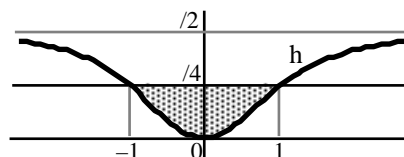
$$\arctan(x^2) dx = x \arctan(x^2) - \frac{2x^2}{1+x^4} dx = \dots$$

[y los log y arctan del resultado no podríamos evaluarlos sin calculadora].

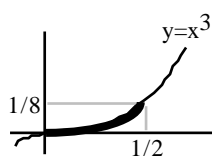
Con trapezios o Simpson salen valores desconocidos del arctan (y sería difícil acotar el error). Así que lo mejor es integrar el desarrollo de Taylor [se puede llegar hasta $x=1$] y acotar el error de la serie alternada que sale:

$$2 \int_0^1 [x^2 - \frac{1}{3} x^6 + \frac{1}{5} x^{10} - \frac{1}{7} x^{14} + \dots] dx = 2 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{21} + \frac{1}{55} - \dots \right] = \frac{4}{7}, \text{ con error } < \frac{2}{55} < \frac{2}{50} = 0.04$$

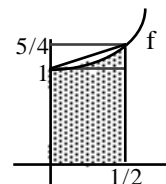
Por tanto, Área $= 1.571 - 0.571 = 1.00$ con error < 0.04 (con ordenador: Área 0.974991).



Probar que la longitud L del tramo de la curva $y=x^3$ comprendido entre $(0,0)$ y $(1/2, 1/8)$ cumple $\frac{1}{2} < L < \frac{9}{16}$.



$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 \quad L = \int_0^{1/2} \sqrt{1+9x^4} dx \text{ (primitiva no calculable).} \\ f(x) &= [1+9x^4]^{1/2} = 1 + \frac{9}{2} x^4 - \frac{81}{8} x^8 + \dots \text{ si } |9x^4| < 1 \quad |x| < 1/\sqrt{3} \\ L &= \left[x + \frac{9}{10} x^5 - \frac{9}{8} x^9 + \dots \right]_0^{1/2} = \frac{1}{2} + \frac{9}{320} - \frac{9}{4096} + \dots, \\ &\text{[válido por estar } [0, 1/2] \text{ dentro del intervalo de convergencia]} \end{aligned}$$



La serie de L es decreciente y alternada a partir de segundo término $\frac{1}{2} = S_1 < S_3 < \dots < L < \dots < S_2 = \frac{169}{320} < \frac{9}{16}$.

Otra forma (la integral puede describir el área limitada por f en $[0, 1/2]$): área rectángulo $= \frac{1}{2} < L < \frac{9}{16}$ área trapecio $= \frac{9}{16}$,

[* pues, como es fácil ver, f es convexa en ese intervalo].

[La acotación $L > 1/2$ era clara geoméricamente antes de hacer ninguna cuenta].

Si $f(x) = \frac{2x}{8-x^2}$, hallar (sin calculadora) un racional que aproxime la integral $I = \int_0^1 f$ con un error menor que 10^{-2} .

Parece inútil aproximar I cuando podemos fácilmente dar su valor exacto: $I = [-\log|8-x^2|]_0^1 = \log \frac{8}{7}$, pero el problema es que, si no tenemos calculadora, no sabemos el valor de ese logaritmo. Pero por Taylor:

$$\log\left(1 + \frac{1}{7}\right) = \frac{1}{7} - \frac{1}{2 \cdot 49} + \frac{1}{3 \cdot 243} - \dots \quad \text{serie de Leibniz} \quad I = \frac{13}{98}, \text{ con error } < \frac{1}{729} < 10^{-2}.$$

Podríamos también desarrollar primero el integrando y luego integrar la serie:

$$\frac{2x}{8-x^2} = \frac{x}{4} \frac{1}{1-x^2/8} = \frac{x}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{8}\right)^n = \frac{1}{4}x + \frac{1}{32}x^3 + \frac{1}{256}x^5 + \dots \quad I = \frac{1}{8} + \frac{1}{128} + \frac{1}{1536} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n8^n}$$

El problema de esta serie (que debe sumar lo mismo) es que no es alternada, lo que hace difícil estimar los errores.

Si sumamos dos términos $I = \frac{17}{128}$, el error cometido es $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n8^n} < \frac{1}{3 \cdot 8^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n = \frac{1}{3 \cdot 7.8^2} < 10^{-2}$.

Probablemente Simpson daría un error admisible con $h=1/2$, pero necesitaríamos acotar la $f^{(4)}$ [largo].

Probemos con Trapecios que hay que derivar menos: $f' = 2 \frac{8+x^2}{[8-x^2]^2}$, $f'' = 4 \frac{x[24+x^2]}{[8-x^2]^3}$ en $[0,1]$ es $|f''| \leq \frac{100}{7^3}$

$$|\text{error}| \leq \frac{100}{12 \cdot 343} h^2 \quad \text{basta si } h=1/2 \quad I = \frac{1}{4} [f(0)+2f(1/2)+f(1)] = \frac{1}{4} \left[0 + \frac{8}{31} + \frac{2}{7}\right] = \frac{59}{434} \text{ con error } < 10^{-2}.$$

Dibujar la gráfica de $r(x) = \frac{x-1}{x^4+1}$ y encontrar, si existen, los x en los que alcanza sus extremos $R(x) = \int_0^x r$, $x \in [0, \infty)$.

r es de $C(\mathbf{R})$; $r(x) = 0$ cuando $x = \pm 1$; $r(x) > 0$ (< 0) si $x < 1$ (> 1).

$$r'(x) = -\frac{3x^4-4x^3-1}{[x^4+1]^2}, \quad r''(x) = \frac{4x^2[3x^5-5x^4-5x+3]}{[x^4+1]^3}$$

$P=3x^4-4x^3-1$ tiene 1 raíz positiva x_+ [++-] y 1 negativa x_- [+-].

$P(-1)=-6$, $P(0)=1$, $P(1)=2$ y $P(2)=-15$ $x_- \in [-1,0]$ y $x_+ \in [1,2]$.

r decrece hasta x_- , crece hasta x_+ y decrece a partir de entonces.

$x=-1$ inflexión; en $x=0$ no hay (no cambia de signo r''); los otros puntos de inflexión los darían las raíces (ya no hay más enteras y negativas sólo la -1) de $3x^4-8x^3+8x^2-8x+3$ (se pueden hallar haciendo $z=x+1/x$).

Valores: $r(-2)=-3/17$, $r(-1)=-1$, $r(0)=-1$ (Rolle confirma x_-), $r(2)=1/17$; $r'(-1)=-3/2$, $r'(0)=1$ (otra vez x_-),...

A la vista de la gráfica de r : R decrece si $0 < x < 1$ (vamos añadiendo áreas negativas) y luego crece (lo mismo se deduce del signo ya analizado de $R'(x) = r(x)$). El mínimo se da, pues, si $x=1$. Aproximemos el valor de $R(1)$:

$$\text{Por Simpson con } h=1/2: I_1 = \int_0^1 r = \frac{1}{6} \left[-1 - \frac{4.8}{17} + 0\right] = -\frac{49}{102} \approx -0.480 \text{ (sin cota del error)}$$

$$\text{Por Taylor: } r(x) = [x-1][1-x^4+x^8-\dots] = -1+x+x^4-x^5-x^8+\dots \text{ si } |x|<1 \quad I_1 = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{13} + \dots$$

[nada nos garantiza que podamos integrar hasta $x=1$ (ahí diverge la serie de r), pero parece que va bien, pues

la serie de I_1 converge: $S_1=-1 < S_5 \approx -0.578 < \dots < I_1 < \dots < S_7 \approx -0.401 < S_3 \approx -0.3$ (coherente con Simpson)]

Podría no haber máximo de R (el $[0, \infty)$ es no acotado). Si la integral impropia entre 1 e ∞ fuese divergente (que no lo es pues $r(x)$ se parece a x^{-3} en el ∞), la R tendería a $-\infty$; si fuese convergente y tendiese a un valor I_2 mayor que $|I_1|$, R tendería hacia $I_1+I_2 > 0$ (valor que no alcanzaría); y si converge hacia un valor menor que $|I_1|$ entonces el máximo se alcanza en $x=0$ (y vale $R(0)=0$). Veamos que esto último es lo que sucede realmente:

En $[1, \infty)$ es $f < 0$. El criterio de comparación por desigualdades nos da fácilmente cotas de la impropia:

$$I_2 = \int_1^{\infty} r < \int_1^{\infty} \frac{x dx}{x^4+1} = \frac{1}{2} [\arctan x^2]_1^{\infty} = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{8} < \frac{3.2}{8} = 0.4, \text{ o bien:}$$

$$I_2 = \int_1^{\infty} r < \int_1^{\infty} \frac{(x-1)dx}{x^4} = \left[\frac{1}{3x^3} - \frac{1}{2x^2}\right]_1^{\infty} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} < 0.17, \text{ bastante mejor cota.}$$

Si $x \in [0, 1]$, $R(x) = \int_0^x f = \int_0^1 f + \int_1^x f = I_1 + I_2 < 0$, como se deduce de las cotas halladas el máximo se da para $x=0$.

[Con mucho esfuerzo podríamos hallar la primitiva R y el valor exacto de ambas integrales. Lo primero es factorizar el denominador, para lo que necesitamos las raíces de $x^4=-1$. Probando con $a \pm bi$ en $x^2=\pm i$ o, mejor, utilizando las fórmulas para raíces de complejos del próximo capítulo obtenemos que son $(\pm 1 \pm i)/\sqrt{2}$. Así:

$$R(x) = \int \frac{x dx}{x^4+1} = \int \frac{x dx}{[x^2+\sqrt{2}x+1][x^2-\sqrt{2}x+1]} = \dots = \frac{1}{2} \arctan x^2 - \frac{\sqrt{2}}{8} \log \frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} - \frac{\sqrt{2}}{4} [\arctan(x\sqrt{2}+1) + \arctan(x\sqrt{2}-1)]$$

De donde, con la calculadora, obtenemos: $I_1 \approx -0.474$ (buena aproximación la de Simpson), $I_2 \approx 0.149$.